# PROBLÈME A

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

Étant donné $p$ et $q$ dans $\mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls), $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel réel des matrices à $p$ lignes et $q$ colonnes à coefficients réels. On note $U_{p,q}$ l'élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Lorsque $p = q = n$, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées $(n \times n)$ à coefficients réels. $I_n$ la matrice unité pour la multiplication et $U_n$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice transposée est notée ${}^tM$.

Une projection de $\mathbb{R}^n$ est un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $f^2 = f \circ f = f$.

---

Dans tout le problème, $n$ un entier naturel tel que $n \geqslant 3$. Si $p$ et $q$ sont deux entiers naturels vérifiant $0 < 2p < n$ et $0 < 2q < n$, on note $C_{p,q}$ la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$C_{p,q} = \left(\begin{array}{c|c|c} U_{p,q} & (0) & U_{p,q} \\ \hline (0) & (0) & (0) \\ \hline U_{p,q} & (0) & U_{p,q} \end{array}\right)$$

(matrice par blocs dont les « coins » sont des matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ à coefficients égaux à 1, les autres coefficients de $C_{p,q}$ étant nuls).

1. Étude du cas $n = 5$, $p = 1$, $q = 2$.

   *a.* Montrer que la matrice

$$C = C_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   est diagonalisable, et déterminer une base de vecteurs propres de C.

   *b.* Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ de matrice C relativement à la base canonique. Montrer que $f$ est colinéaire à une projection. En supposant $\mathbb{R}^5$ muni de la structure euclidienne canonique, s'agit-il d'une projection orthogonale ?

2. Soit $p$, $q$, $p'$, $q'$ des entiers naturels strictement compris entre 0 et $\dfrac{n}{2}$.

   *a.* Calculer les produits $C_{p,q}\,C_{p',q'}$ et $C_{p',q'}\,C_{p,q}$ (on exprimera le résultat à l'aide de matrices par blocs dont on précisera clairement la taille et les éléments : pour $i$ et $j$ dans $\mathbb{N}$, on notera $i \wedge j$ le plus petit de ces deux entiers naturels). Vérifier en particulier que $(C_{p,q})^2 = 2(p \wedge q)\,C_{p,q}$.

   *b.* Démontrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices de la forme $\alpha I_n + \beta C_{p,q}$ où $\alpha$ et $\beta$ décrivent $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit matriciel. Déterminer les éléments inversibles de $\mathcal{A}$.

   *c.* Sous les mêmes hypothèses qu'en *b.*, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $C_{p,q}$.

   *d.* Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda C_{p,q}$ soit la matrice d'une projection relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et retrouver ainsi les valeurs propres de $C_{p,q}$.

3. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$ et de la structure euclidienne canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ une projection et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice relativement à $\mathcal{B}$. On note $\mathrm{Ker}\,{}^tP$ le noyau de $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice ${}^tP$ dans $\mathcal{B}$ et $(\mathrm{Im}\,(P))^\perp$ l'orthogonal de l'image de $f$.

   *a.* Démontrer l'égalité $\mathrm{Ker}\,({}^tP) = \mathrm{Im}\,(P)^\perp$ (on pourra utiliser le produit scalaire $\langle X \mid Y \rangle = {}^tXY$ entre vecteurs colonnes représentant des éléments de $\mathbb{R}^n$).

   *b.* Montrer que Ker (P) et Im (P) sont deux sous-espaces orthogonaux si et seulement si $P = {}^tP$.

   *c.* En reprenant les notations de la question 2. déduire de ce qui précède une condition nécessaire et suffisante sur $p$ et $q$ pour que les sous-espaces propres de $C_{p,q}$ soient orthogonaux.

## PROBLÈME B

**N.B.** — *Si vous utilisez un théorème pour déduire un résultat dans le cours du problème, il faut, dans ce cas, donner de la façon la plus précise possible les hypothèses et conclusions du théorème et justifier son application aux cas considérés.*

*Les quatre parties sont largement indépendantes.*

On note E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$.

Dans tout le problème, A est une partie non vide de E et distincte de E.

*Rappels.*

1. On dit que $x$, $x \in E$, appartient à $\mathring{A}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte centrée en $x$ et de rayon $\varepsilon$ (autrement dit l'ensemble des $z$, $z \in E$, tels que $\|z - x\| < \varepsilon$) est incluse dans A.

2. On dit que $x$, $x \in E$, appartient à $\overline{A}$ s'il existe une suite d'éléments de A convergente dans E (au sens de la norme de E) vers $x$.

On notera pour tout $x$, $x \in E$, $f_A(x) = \inf_{a \in A} \{\|x - a\|\}$.

### I

1. Soit $k$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. On dit qu'une application $g$ de E dans $\mathbb{R}$ est $k$-lipschitzienne si pour tous $x$ et $y$, $x \in E$ et $y \in E$, on a :

$$|g(x) - g(y)| \leqslant k\,\|x - y\|.$$

   *a.* Montrer que $f_A$ est $k$-lipschitzienne pour un certain $k$ que l'on déterminera.

   *b.* Que peut-on conclure quant à la continuité de $f_A$ ?

2. Montrer que $f_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

**Tournez la page S.V.P.**

## II

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne :

$$\| (x, y) \| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ pour tous } (x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit A la réunion des ensembles $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

1. Montrer que si $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, $f_A(x + n, y + p) = f_A(x, y)$.

2. Soit D l'ensemble des points $(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $|x| < \frac{1}{2}$ et $|y| < \frac{1}{2}$.

   *a.* Montrer que pour tous $(x, y)$, $(x, y) \in D$, $f_A(x, y) = \min(|x|, |y|)$.

   *b.* En quels points de D les dérivées partielles de $f_A$ existent-elles ? Préciser les valeurs de ces dérivées partielles aux points de D où elles existent.

3. Étudier les dérivées partielles en $(x_0, 0)$ et $(0, y_0)$, $(x_0, 0) \in D$ et $(0, y_0) \in D$, de l'application $g_A$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tous $(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par $g_A(x, y) = [f_A(x, y)]^2$.

## III

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de la norme « valeur absolue » et A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, distincte de $\mathbb{R}$.

1. On suppose $\mathring{A}$ non vide. Montrer que $f_A$ est dérivable en tout point $x$ de $\mathring{A}$ et calculer sa dérivée en ces points.

2. Soit $x$, $x \in \mathbb{R}$, n'appartenant pas à $\overline{A}$.

   *a.* On suppose que $x$ est tel que $a < x$ pour tout $a \in A$.

   Calculer $f_A(x)$ en fonction de $x$ et $M_A$ où $M_A = \sup_{a \in A} a$.

   L'application $f_A$ est-elle dérivable en $x$ ? Si oui, calculer $f'_A(x)$.

   *b.* Si on suppose que $x$ est tel que $x < a$ pour tout $a \in A$, calculer $f_A(x)$ en fonction de $x$ et $m_A$ où $m_A = \inf_{a \in A} a$.

   L'application $f_A$ est-elle dérivable en $x$ ? Si oui, calculer $f'_A(x)$.

3. Soit $t$, $t \in \mathbb{R}$, et notons $B(t)$ l'ensemble des réels $z$, $z \in A$, tels que $t < z$ et $C(t)$ l'ensemble des réels $z$, $z \in A$, tels que $z < t$.

   Pour $t$, $t \in \mathbb{R}$, tel que $B(t)$ et $C(t)$ sont non vides, on note enfin :

$$M_{C(t)} = \sup_{c \in C(t)} c \quad \text{et} \quad m_{B(t)} = \inf_{b \in B(t)} b.$$

   Supposons que $x$, $x \in \mathbb{R}$, n'appartient pas à $\overline{A}$ et qu'il ne majore ni ne minore A.

   *a.* Montrer que $f_A(x) = \min(f_{B(x)}(x), f_{C(x)}(x))$.

   *b.* Montrer qu'il existe un intervalle $I(x)$ contenant $x$ (intervalle que l'on déterminera) tel que les fonctions $t \longmapsto M_{C(t)}$ et $t \longmapsto m_{B(t)}$ sont constantes sur $I(x)$.

c. Montrer que si $x$ est tel que $x \neq \frac{M_{C_A} + m_{B_A}}{2}$ alors $f_A$ est dérivable en $x$ et calculer $f'_A(x)$.

d. Montrer que si $x$ est tel que $x = \frac{M_{C_A} + m_{B_A}}{2}$ alors $f_A$ est dérivable à gauche et à droite en $x$ et calculer ces dérivées à gauche et à droite (en $x$).
L'application $f_A$ est-elle dérivable en $x$ ?

4. On suppose que A est borné.
L'application $f_A$ est-elle dérivable en $M_A = \sup_{a \in A} a$ et $m_A = \inf_{a \in A} a$ ?

5. Montrer que $f_A$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est dense dans $\mathbb{R}$ (autrement dit si $\overline{A} = \mathbb{R}$).

6. a. Soit $x$, $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \in \overline{A}$ et $x \in \mathring{A}$.
En supposant que $f_A$ est dérivable en $x$, calculer $f'_A(x)$.

b. Soit A l'ensemble des points $z$, $z \in \mathbb{R}$, tels que $z = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.
On pose $g_A(x) = \frac{f_A(x)}{x}$ pour tout $x$, $x \in \mathbb{R}$, non nul.
Si $x_n = \frac{1}{2^n}$ et $y_n = \frac{3}{2^{n+1}}$ pour tout $n$, $n \in \mathbb{N}$, calculer $g_A(x_n)$ et $g_A(y_n)$ et déterminer $\lim_{n \to +\infty} g_A(x_n)$ et $\lim_{n \to +\infty} g_A(y_n)$.
Que peut-on conclure concernant la dérivabilité à droite en 0 de $f_A$ ?

## IV

Soit A l'ensemble des points $a$, $a \in \mathbb{R}$, tels que $a = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit l'application $f_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = \frac{1}{4^n} f_A(4^n x)$.

1. Montrer que $f_n$ est périodique et préciser sa plus petite période strictement positive.

2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge en tout point de $\mathbb{R}$ et que l'application F qui à chaque $x$, $x \in \mathbb{R}$, fait correspondre $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer les coefficients de Fourier de $f_0$.

4: Est-ce que la série de Fourier de $f_0$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ vers $f_0$ ?

5. Calculer les sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} .$$